Pythagoreïsche drietallen

Guy Van Leemput, Sint-Jozefcollege te Turnhout, België

Toelichtingen:

Wat op de volgende bladzijden volgt is een werktekst met antwoorden rond het zoeken van rechthoekige driehoeken waarbij de lengte van elke zijde een natuurlijk getal is. Zo'n drietal zullen we een Pythagoreïsch (of Pythagorees) drietal noemen.

De tekst is tot stand gekomen nadat ik met een groep leerlingen van het vijfde jaar rond dit onderwerp had gewerkt. Dat waren toen sterke leerlingen die een pakket hadden van zes lesuren wiskunde per week plus nog twee extra lesuren seminarie. Bij ons op school hebben we in die seminaries de kans om eerder projectmatig te werken. In zo'n project is het soms ook makkelijker dan in de 'gewone' les om te kiezen voor een geïntegreerde aanpak. Willen we dat de verschillende aspecten van wiskunde (rekenen, meetkundig redeneren, …) bruikbaar zijn binnen de wiskunde en in andere vakken dan is het belangrijk ze niet geïsoleerd te behandelen. Op die manier is er veel meer kans op de transfert naar andere vakgebieden. Daarom maakte ik in dit seminarie samen met de leerlingen een wandeling langs vele gebieden uit de wiskunde :

- De meetkunde: stelling van Pythagoras, gelijkvormige driehoeken, ...
- Getallenleer: ontbinding in priemfactoren , als p een tweevoud + 1 is dan is p^2 ook een tweevoud + 1, ...
- Algebra: stelsels oplossen, rekenen met letters, merkwaardige producten, ...
- Problem-solving: systematisch werken is bijzonder belangrijk om tot een resultaat te komen,

We starten vanuit een klassiek probleem: hoe kunnen we met een touw met 12 knopen een rechte hoek uitzetten? Dit probleem proberen we te veralgemenen : zijn nog andere touwen (met meer of minder knopen) geschikt? Hier worden de leerlingen een eerste keer uitgedaagd om creatief te zijn: ze mogen de grafische rekenmachine gebruiken, programma's schrijven, meetkundig of eerder algebraïsch werken. Wat ze niet mogen is uitwisselen met elkaar of opzoeken op internet. Daarom is het wenselijk dat bij deze eerste les de naam 'Pythagoreïsche drietallen' nog niet wordt gebruikt.

In een tweede les wisselen de leerlingen in groepjes (van drie of vier) hun resultaten uit, bedoeling is dat ze een zo groot mogelijke lijst van drietallen kunnen aanleggen en dat ze een onderscheid maken tussen congruente, gelijkvormige of échte drietallen. Daarna proberen ze aan de hand van deze uitgezuiverde lijst om patronen te herkennen en zo eventueel een formule op te stellen die oneindig veel drietallen levert. Het is mijn ervaring dat leerlingen spontaan tot verschillende formules komen.

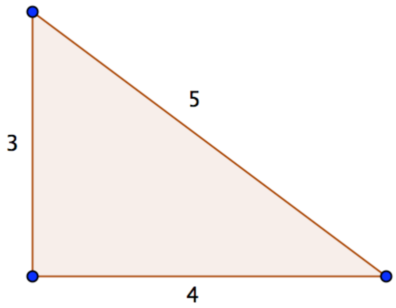
Tenslotte presenteert elk groepje een gestructureerde samenvatting van hun zoeken en van de gevonden resultaten. Tegelijk vullen de overige leerlingen een evaluatielijst in. Deze lijst (zie bijlage) werd samengesteld door de leraar die samen met de leerlingen (voor de aanvang van de groepspresentaties) de criteria afgesproken had. Deze punten van de leerlingen werden dan uitgemiddeld en gaven met de punten van de leraar de twee grenzen waartussen de punten van de aparte groepsleden lagen. De ervaring was positief, de leerlingen deden hun werk ernstig en hun punten lagen dicht bij de punten van de leraar.

De lessenreeks werd dan door de leraar besloten met bespreking en uitwisseling van de ervaringen en samenvatting van alle resultaten. Omdat er in dit seminarie speciaal aandacht was voor het **zoekproces** werd aan elke leerling gevraagd om tijdens deze lessenreeks een logboek bij te houden. In zo'n logboek noteert hij of zij alle ideeën, wendingen, problemen en tips van anderen. Op die manier zou moeten zichtbaar worden hoe elkeen vooruitgang boekt in het vinden van resultaten, waarom de ene leerling wel tot een formule kwam en een andere niet. In deze laatste les krijgt elke leerling ook feedback over dat logboekje.

De werktekst die nu volgt werd na deze lessenreeks samengesteld omdat het onderwerp ook prima mogelijkheden heeft om ermee aan de slag te gaan in klassen die een minder zwaar pakket wiskunde hebben, bijvoorbeeld in een derde jaar. Het kan dan nodig zijn om het denken van de leerlingen een beetje meer te sturen. Vroegere versies van de tekst zijn reeds verschenen in Uitwiskeling 15/2 (1999) 12-37 en Wiskunde en Onderwijs 26/101 (2000) 26-48.

1. Inleiding: Pythagoras draait zich om

Neem 3 stokken van lengte 3, 4 en 5 meter en probeer er een driehoek mee te vormen. Er is maar 1 mogelijkheid: je vindt de rechthoekige driehoek.
Dat deze rechthoekige driehoek de enige mogelijkheid is, kunnen we inzien op de volgende manier. Stel dat we een willekeurige driehoek maken met de stokken van drie, vier en vijf meter. In een tweede driehoek vertrekken we van twee zijden die drie en vier meter lang zijn die loodrecht op elkaar staan. Met de stelling van Pythagoras vinden we dat de derde zijde vijf meter lang moet zijn. Met behulp van het congruentiekenmerk zijde, zijde, zijde vinden we dat beide driehoeken congruent zijn en dus kan de hoek in onze eerste driehoek alleen maar recht zijn.



Om een loodlijn of een rechte hoek uit te zetten gebruiken bouwlieden vaak bovenstaande werkwijze die reeds 4000 jaar oud is. Op de plaats waar de loodlijn op de muur moet komen markeren ze een punt en vanaf dat punt wordt een lengte van 3 meter uitgezet. In dit tweede punt bevestigt men een stok van precies 5 meter. In het eerste punt een stok van 4 meter. Waar de uiteinden van deze 2 stokken elkaar raken verkrijgt men de gevraagde loodlijn. Het is onmogelijk een andere driehoek dan deze te verkrijgen met die stokken van lengte 3, 4 en 5 meter. Daarom komt met deze driehoek het drietal 3, 4, 5 eenduidig overeen. Zo'n drietal (3, 4, 5) noemen we een Pythagoreïsch drietal.

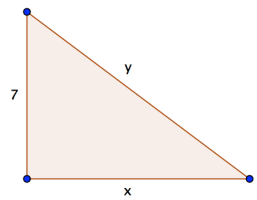
2. Een stukje algebra: Pythagoreïsche drietallen bouwen

Pythagoreïsche drietallen zijn drietallen van de vorm (*a, b, c*) met *a, b* en *c* natuurlijke getallen verschillend van nul zodat $a^2 + b^2 = c^2$. Met zo'n drietal komt dus altijd een rechthoekige driehoek overeen. Het loont de moeite enkele (eenvoudige) Pythagoreïsche drietallen van buiten te kennen want je komt ze vaak tegen in berekeningen. Dit is echter niet de reden waarom we het de moeite vonden om hierover een tekst samen te stellen. Veeleer bleek dat het onderwerp zich uitstekend leende voor een geïntegreerde (van-alles-wat) aanpak. Van de wiskundige aspecten die aan bod zullen komen, vermelden we het oplossen van een stelsel, het ontbinden in priemfactoren, gelijkvormige driehoeken en het merkwaardig product $a^2 - b^2$.

Op het Babylonisch kleitablet 'Plimpton 322' gedateerd 1900-1600 vóór Christus (!) vond men 18 Pythagoreïsche drietallen. Maak zelf eens een lijstje van zo'n drietallen.

Van een rechthoekige driehoek is slechts één rechthoekszijde (7) gegeven. De andere rechthoekszijde noemen we x en de schuine zijde y. Welke natuurlijke getallen kun je invullen voor x en y ?

Zijn er meerdere mogelijkheden ?



De formule van Pythagoras geeft $x^2 + 7^2 = y^2$, of na overbrengen : $7^2 = y^2 - x^2$. Ontbind het rechterlid in factoren. Waarom zijn $y - x$ en $y + x$ positief en geheel? We gaan dan op zoek naar twee natuurlijke getallen die 49 als product hebben. Welke mogelijkheden kun je vinden ?
We hebben dus ofwel y – x = 1 én y + x = 49 ofwel y – x = 7 en y + x = 7. We bekijken de eerste mogelijkheid:

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x + (x+1) = 49 \end{cases}.$$

We vinden $x = 24$ en $y = 25$. Zo hebben we het Pythagoreïsch drietal (7, 24, 25) gevonden. Indien dit drietal nog niet op je lijstje voorkomt, kun je het er aan toevoegen.

Ook de tweede mogelijkheid levert een stelsel:

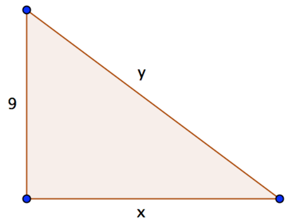
$$\begin{cases} y - x = 7 \\ y + x = 7 \end{cases}$$

Hier is de oplossing $y = 7$ en $x = 0$ en dus komt hiermee geen échte driehoek overeen.

We stellen nu (in gedachten) dezelfde vragen voor een andere driehoek.
Van deze rechthoekige driehoek is slechts één rechthoekszijde (11) gegeven. Welke natuurlijke getallen kun je nu invullen voor x en y?

Na analoge berekeningen vind je het Pythagoreïsch drietal (11, 60, 61) terug. Probeer deze berekeningen zelf te maken.

Het gaat goed. Nog maar eens dezelfde reeks van vragen voor een derde driehoek met rechthoekszijde 9.



Welke natuurlijke getallen kun je nu invullen voor x en y?

Wie goed gezocht heeft merkt bij deze oefening een verschil. We kunnen 81 nu op *drie* 'goede' manieren ontbinden: 9 · 9, 1 · 81 maar ook 3 · 27. Dit betekent meer werk want nu moet je drie stelsels oplossen.

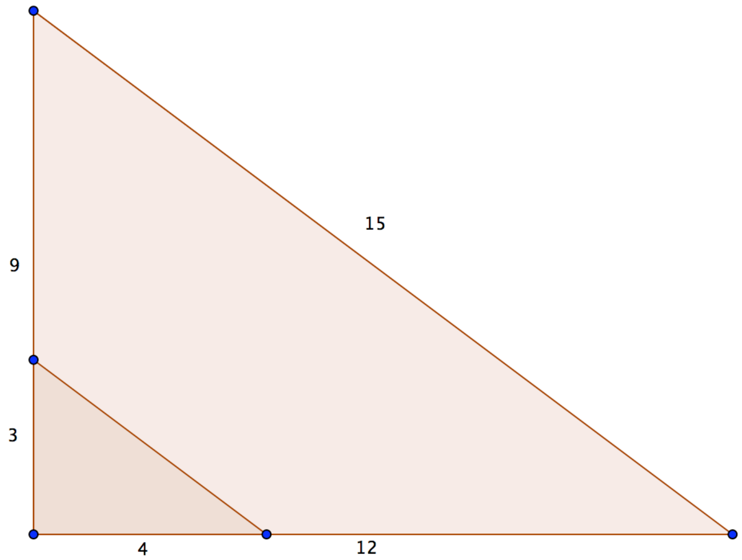
Het eerste stelsel $\begin{cases} y - x = 9 \\ y + x = 9 \end{cases}$ levert (weer) geen échte driehoek op en dus geen écht Pythagoreïsch drietal.

Het tweede stelsel $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 81 \end{cases}$ oplossen levert het Pythagoreïsch drietal (9, 40, 41) op.

Het derde stelsel $\begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 27 \end{cases}$ oplossen levert het drietal (9, 12, 15) op.

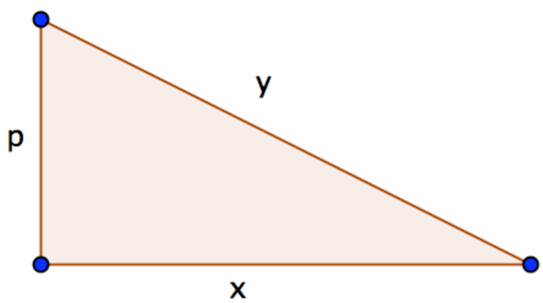
Teken de driehoek die overeen komt met dit laatste drietal en vergelijk met de driehoek gevormd door het Pythagoreïsch drietal (3, 4, 5). Wat merk je op?

De twee driehoeken hebben dezelfde vorm. We kunnen dit ook afleiden uit de drietallen zelf: om (9, 12, 15) te krijgen, moet je elke component van (3, 4, 5) vermenigvuldigen met hetzelfde getal, namelijk 3. Op onderstaande figuur kun je zien dat je vanuit deze 'basisdriehoek' bepaald door (3, 4, 5) heel wat drietallen kunt halen door gewoon elke zijde met een bepaald (natuurlijk) getal te vermenigvuldigen.



Daarom maken we onderscheid tussen de échte Pythagoreïsche drietallen en deze die uit deze echte kunnen worden afgeleid door vermenigvuldiging met een natuurlijk getal, en die we voor de gemakkelijkheid onechte (of gelijkvormige) Pythagoreïsche drietallen noemen. Onderlijn in je lijstje van Pythagoreïsche drietallen de échte in het groen en de onechte in het rood.

In de onderstaande driehoek is slechts gegeven dat de lengte van één rechthoekszijde een priemgetal p is. Zoek opnieuw de mogelijkheden voor x en y.



Analoog vinden we dan dat $p^2 = (y - x)(y + x)$. Precies omdat p een priemgetal is kunnen we p^2 enkel ontbinden als $1 \cdot p^2$ en als $p \cdot p$. Dit leidt tot twee stelsels.

Het eerste stelsel, $\begin{cases} y - x = p \\ y + x = p \end{cases}$ levert geen echte driehoek op en dus zeker geen Pythagoreïsch drietal.

Het tweede stelsel $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = p^2 \end{cases}$ kunnen we opnieuw oplossen en levert na een drietal stappen (reken na!) het Pythagoreïsch drietal $\left(p, \dfrac{p^2 - 1}{2}, \dfrac{p^2 + 1}{2}\right)$ op.

Voor elk priemgetal *p* dat we hierin invullen, krijgen we van deze formule een écht Pythagoreïsch drietal. Controleer dit door voor *p* achtereenvolgens 3, 5, 7, 11 en 13 in te vullen. Vul deze drietallen (indien nodig) aan op je lijstje.
Wellicht merkte je dat de twee laatste getallen steeds opeenvolgende getallen zijn. Kun je dit verklaren? De bovenstaande formule werkt ook als we voor p een oneven getal invullen dat niet priem is. Controleer dit.

Hoe hard we ook ons best doen, de gevonden formule geeft ons nog niet alle (echte) Pythagoreïsche drietallen. Zo zullen we bv. nooit (8, 15, 17) kunnen terugvinden. Wat dat betreft scoort de formule $\left(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2\right)$ met *a* en *b* onderling ondeelbare getallen, niet beide oneven en $a > b$ beter. Bewijs tot slot dat zo'n drietal ook voldoet aan de formule van Pythagoras.

Noot:

Dat de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$ oneindig veel oplossingen heeft hebben we zonet aangetoond. De vergelijking $x^n + y^n = z^n$ met n > 2 heeft geen enkele oplossing. Dat stelde Fermat in 1656. Hij schreef er bij dat hij een 'waarlijk prachtig bewijs' gevonden had, maar dat de 'marge te klein' was om het bewijs te bevatten. Sindsdien hebben vele wiskundigen hun tanden gezet in dit eenvoudig (ogend) probleem. Hun pogingen hadden soms een belangrijke invloed op de wetenschap maar leidden nooit tot een bewijs. Het duurde tot 1995 vooraleer iemand dit vermoeden (ondertussen bekend staande als dé stelling van Fermat) kon bewijzen. Die 'iemand' was Andrew Wiles. Hij besteedde er meer dan vijf jaar aan !